NO DATE 27/04/17

$$\int_{10}^{17} \frac{1}{x-3}\,dx = \left[\log(x-3)\right]_{10}^{17}$$

$$= \log 14 - \log 7$$

$$= \log \frac{14}{7} = \log 2$$

$$\int_{0}^{2} \frac{1}{x-4}\,dx = \left[\log(4-x)\right]_{0}^{2}$$

$$= \log 2 - \log 4$$

$$= -\log 2.$$

$$\int_{0}^{\pi/6} \cos^2 x\,dx = \int_{0}^{\pi/6} \frac{1+\cos(2x)}{2}\,dx.$$

$$\boxed{\begin{aligned} \cos^2 x &= \frac{1+\cos(2x)}{2} \\ \sin^2 x &= \frac{1-\cos(2x)}{2} \end{aligned}}$$

$$= \left[\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin(2x)\right]_{0}^{\pi/6}$$

$$= \left(\frac{\pi}{12} + \frac{1}{4}\left(\sin\frac{\pi}{3}\right)\right) - \left(0 + \frac{1}{4}\cdot 0\right)$$

$$= \frac{\pi}{12} + \frac{1}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

- $\int \sin^2 x\,dx = \int \frac{1-\cos(2x)}{2}\,dx = \dots$

- $\int \sin(3x)\sin(7x)\,dx = \int \frac{1}{2}\cos(4x) - \cos(10x)\,dx$

$$= \frac{1}{8}\sin(4x) - \frac{1}{20}\sin(10x)$$

$$\boxed{\begin{aligned} &2\sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta) \\ &2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) \\ &2\sin\alpha\cdot\cos\beta = \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) \end{aligned}}$$

$$I = \int \cos^4 x\,dx = \int (\cos^2 x)^2\,dx = \int \left(\frac{1+\cos(2x)}{2}\right)^2 dx$$

$$= \int \frac{1}{4}\left(1 + 2\cos 2x + \underbrace{\cos^2(2x)}_{\frac{1+\cos(4x)}{2}}\right) dx$$

$$= \int \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos(4x)\,dx$$

$$= \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin(4x) + C$$

NO DATE

$$I = \int \sin^5 x \, dx = \int \sin^4 x \sin x \, dx$$
$$= \int (1-\cos^2 x)^2 \sin x \, dx$$

Κάνοντας την αντικατάσταση $y = \cos x$.

Οπότε $dy = -\sin x \, dx$

Άρα προκύπτει: $-\int (1-y^2)^2 \, dy =$

$$-\int y^4 - 2y^2 + 1 \, dy =$$

$$-\frac{y^5}{5} + \frac{2}{3} y^3 - y.$$

Επομένως $I = -\dfrac{\cos^5 x}{5} + \dfrac{2}{3}\cos^3 x - \cos x.$

Με την ίδια μέθοδο υπολογίζονται τα ολοκληρώματα της μορφής:

$\int \cos^m x \sin^n x \, dx$, όταν ένας από τους m, n είναι περιττός και ο άλλος άρτιος.

$$I = \int \tan^2 x \, dx = \int (1+\tan^2 x) - 1 \, dx$$
$$= \tan x - x + C$$

NO DATE

Κάποιες επιτυχημένες τριγωνομετρικές αντικαταστάσεις.

α) Για ολοκληρώματα που περιέχουν την παράσταση $\sqrt{a^2-x^2}$, μπορούμε να κάνουμε την αντικατάσταση

$x = a\cdot\cos t$ (ή $x = a\sin t$) ← τότε $0 \le x \le \pi$.

Τότε $dx = -a\sin t$ ενώ:

$$\sqrt{a^2-x^2} = \sqrt{a^2-a^2\cos^2 t}$$
$$= \sqrt{a^2\sin^2 t}$$
$$= a|\sin t| \quad \begin{matrix} 0\le t\le\pi \\ \sin t \ge 0 \end{matrix}$$
$$= a\sin t$$

π.χ

$$I = \int \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}$$

Θέτουμε $x = 2\cos t$. Τότε $dx = -2\sin t$.

$\sqrt{4-x^2} = \sqrt{4-4\cos^2 t} = 2|\sin t| = 2\sin t$.

Έτσι το ολοκλήρωμα μετασχηματίζεται στο

$$\int \frac{1}{4\cos^2 t\cdot 2\sin t}(-2\cdot\sin t)\,dt$$

$$= -\frac{1}{4}\int \frac{1}{\cos^2 t}\,dt = -\frac{1}{4}\tan(t) + C.$$

Πρέπει το ολοκλήρωμα να εκφραστεί συναρτήσει του x. Άρα:

$$\tan t = \frac{\sin t}{\cos t} = \frac{2\sin t}{2\cos t} = \frac{\sqrt{4-4\cos^2 t}}{x} = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}$$

Άρα $I = -\frac{1}{4}\frac{\sqrt{4-x^2}}{x} + C$.

β) Σε ολοκληρώματα που εμφανίζεται την παρ. $\sqrt{x^2-a^2}$, μπορούμε να κάνουμε την αντικατάσταση: $x=\frac{a}{\cos t}$ → τότε $0<t<\pi/2$

$$dx=a\cdot\left(-\frac{1}{\cos^2 t}\right)\cdot(-\sin t)$$

$$=a\,\frac{\sin t}{\cos^2 t}$$

και $$\sqrt{x^2-a^2}=\sqrt{\frac{a^2}{\cos^2 t}-a^2}=a\sqrt{\frac{1-\cos^2 t}{\cos^2 t}}$$

$$=a\sqrt{\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}}$$

$$=a\cdot\frac{\sin t}{\cos t}=a\tan t.$$

Π.χ.

$$I=\int\frac{\sqrt{x^2-9}}{x}\,dx.$$

Θέτουμε $x=\frac{3}{\cos t}$, τότε:

$$dx=3\,\frac{\sin t}{\cos^2 t}\,dt=3\cdot\frac{\tan t}{\cos t}\,dt.$$

και $\sqrt{x^2-9}=3\tan t$

Έτσι αναγόμαστε στον υπολογισμό του

$$I' = \int \frac{3\tan t}{\frac{3}{\cos t}} \cdot 3 \cdot \frac{\tan t}{\cos t}\, dt$$

$$= 3 \int \tan^2 t \, dt = 3(\tan t - t).$$

Έτσι $I = 3\left(\frac{\sqrt{x^2-9}}{3} - \arctan\left(\frac{x^2-9}{3}\right)\right) + C$

$$= \sqrt{x^2-9} - 3\arctan\left(\frac{\sqrt{x^2-9}}{3}\right) + C.$$

γ) Για ολοκληρώματα που περιέχουν την παράσταση $\sqrt{x^2+a^2}$, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την αντικατάσταση
$x = a\tan t \Leftrightarrow t = \arctan\left(\frac{x}{a}\right)$
Τότε $dx = a \cdot \frac{1}{\cos t} \cdot dt$, ενώ

$$\sqrt{x^2+a^2} = \sqrt{a^2 \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} + a^2} = a \cdot \sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}} = \frac{a}{\cos t}.$$

π.χ.

$$I = \int \frac{\sqrt{x^2+25}}{x^4}\, dx.$$

Θέτουμε $x = 5\tan t$ ($\Leftrightarrow t = \arctan\left(\frac{x}{5}\right)$)

Τότε $\sqrt{x^2+25} = \frac{5}{\cos t}$

$$dx = 5 \cdot \frac{1}{\cos^2 t}\, dt$$

NO DATE

Αναγόμαστε στο

$$I' = \int \frac{\frac{5}{\cos t}}{5^4 \tan^4 t} \cdot 5 \cdot \frac{1}{\cos^2 t}\, dt = \frac{1}{5^2} \int \frac{\cos t}{\sin^4 t}\, dt$$

$$= \frac{1}{5^2} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \frac{1}{\sin^3 t} + C$$

$$= -\frac{1}{75} \frac{1}{\sin^3 t} + C$$

Έτσι αφού $\tan t = \frac{x}{5}$

$$\sin t = \cos t \cdot \tan t = \frac{5}{\sqrt{x^2+25}} \cdot \frac{x}{5} = \frac{x}{\sqrt{x^2+25}}$$

Άρα $I = -\frac{1}{75} \cdot \frac{(x^2+25)^{3/2}}{x^3} + C.$

ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΡΗΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ.

NO DATE

Ρητή συνάρτηση : $\frac{P(x)}{Q(x)}$, όπου $P(x), Q(x)$ πολυώνυμα.

Πως τις ολοκληρώνουμε;

1º Βήμα: Αν ο βαθμός του πολυωνύμου $P(x)$ είναι μεγαλύτερος ή ίσος του βαθμού του πολ. $Q(x)$ $(deg(P(x)) \geq deg(Q(x)))$ εκτελούμε την διαίρεση του πολυωνύμου

$P(x) = \pi(x)Q(x) + υ(x)$, όπου είτε $υ(x) = 0$ ή $υ(x) \neq 0$ και $deg\,υ(x) < deg(Q(x))$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \pi(x) + \frac{υ(x)}{Q(x)}$$

Το $\pi(x)$ είναι πολυώνυμο και ξέρουμε να το ολοκληρώνουμε. Οπότε αναγόμαστε στην ολοκλήρωση ρητών με τον βαθμό του αριθμητή γνήσια μικρότερο του βαθμού του παρονομαστή.

2º Βήμα: Παραγοντοποιούμε τον παρονομαστή. Κάθε πολυώνυμο (αποδεικνύεται ότι) αναλύεται σε γινόμενο πρωτοβάθμιων όρων και δευτέρου βαθμού με αρνητική διακρίνουσα.

NO DATE

$Q(x)=a(x-a_1)^{n_1}(x-a_2)^{n_2}\dots(x-a_k)^{n_k}(x^2+\beta_1x+\gamma_1)^{m_1}\dots(x^2+\beta_\lambda x+\gamma_\lambda)^{m_\lambda}$

όπου $a_1 \dots a_k$ οι πραγματικές ρίζες του $Q(x)$ (n_i η πολλαπλότητα της ρίζας a_i) και καθένα από τα $x^2+\beta_j x+\gamma_j$ έχει αρνητική διακρίνουσα. ($\beta_j^2-4\gamma_j<0$)

$n_1+n_2+\dots+n_k+2m_1+\dots+2m_\lambda=\deg(Q(x))$